

Jacek Białek

## *Aproksymacje cenowego indeksu Fishera*

### Plan wystąpienia

1. Wprowadzenie
2. Indeksy superlatywne a pomiar CPI
3. Indeks Lowe'a i indeks Younga
4. Indeks Lloyda-Moutlona
5. Indeks arytmetyczno-geometryczny (AG)
6. Badanie symulacyjne
5. Badanie empiryczne
6. Wnioski

## 1. Wprowadzenie

- Pomiar inflacji – CPI, indeks Laspeyresa
- Indeks kosztów utrzymania – COLI
- Indeksy typu Laspeyresa vs indeks Fishera

## 2. Indeksy superlatywne a pomiar CPI

Oznaczmy przez  $P = [p_1, p_2, \dots, p_N]^T$  wektor cen składników koszyka dóbr oraz  $Q = [q_1, q_2, \dots, q_N]^T$  wektor konsumowanych ilości tych dóbr. Niech  $E(P, \bar{u}) = \min_Q \{P^T Q | U(Q) \geq \bar{u}\}$  będzie funkcją wydatków konsumenta dla pewnej funkcji użyteczności  $U(Q)$  i ustalonego, referencyjnego poziomu jej wartości  $\bar{u}$ . Przy wprowadzonych oznaczeniach indeks Konüsa (por. White (1999)) kosztów utrzymania (COLI) ma postać:

$$I_K = \frac{E(P^t, \bar{u})}{E(P^s, \bar{u})}, \quad (1)$$

gdzie  $t$  oznacza okres badany,  $s$  oznacza okres bazowy, natomiast  $P^t = [p_1^t, p_2^t, \dots, p_N^t]^T$  jest wektorem cen dóbr w momencie  $t$ . Tymczasem indeks CPI, zgodny z formułą Laspeyresa, analizuje zmiany cen w koszyku dóbr, ale przy ustalonych ilościach z okresu bazowego, tzn.  $Q^s = [q_1^s, q_2^s, \dots, q_N^s]^T = Q^t$ . Indeks CPI przyjmuje zatem w większości krajów postać

$$I_{La} = \frac{\sum_{i=1}^N q_i^s p_i^t}{\sum_{i=1}^N q_i^s p_i^s}. \quad (2)$$

Przy założeniu, iż wektor  $Q^t$  realizuje zadanie minimalizacyjne związane z funkcją wydatków, można

pokazać (Diewert (1993)), że zachodzi relacja:  $I_K = \frac{E(P^t, U(Q^s))}{E(P^s, U(Q^s))} \leq I_{La}$ . (3)

Uznaje się więc (por. White (1999)), że różnica  $I_{La} - I_K$  określa skalę obciążenia wskaźnika cen towarów i usług konsumpcyjnych z tytułu substytucji dóbr. W literaturze przedmiotu za najlepsze przybliżenie indeksu  $I_K$  uznaje się wartości wyznaczone za pomocą tzw. **indeksów superlatywnych** (por. White (1999)). Generalnie indeksy superlatywne mają tą zaletę, iż aproksymują indeks COLI **abstrahując od postaci funkcji użyteczności**. Nie jest więc wymagana estymacja parametrów funkcji  $U(Q)$ . Dodajmy, iż w omawianym zagadnieniu najczęściej stosuje się superlatywny indeks Fishera ( $I_F$ ), stanowiący średnią geometryczną ze wskazań indeksu Laspeyresa ( $I_{La}$ ) i Paaschego ( $I_{Pa}$ ), tzn.:

$$I_F = \sqrt{I_{La} I_{Pa}}, \quad (4)$$

Innymi superlatywnymi indeksami cen, stosowanymi w celu oszacowania obciążenia CPI z tytułu substytucji dóbr, są również indeksy (por. Hałka i Leszczyńska (2011)):

Walsha oraz Törnqvista

$$I_W = \frac{\sum_{i=1}^N p_i^t \cdot \sqrt{q_i^s q_i^t}}{\sum_{i=1}^N p_i^s \cdot \sqrt{q_i^s q_i^t}}, \quad (5)$$

$$I_T = \prod_{i=1}^N \left( \frac{p_i^t}{p_i^s} \right)^{\bar{w}_i}, \quad \text{gdzie} \quad \bar{w}_i = \frac{1}{2}(w_i^s + w_i^t). \quad (6)$$

### 3. Jaka jest alternatywa, gdy nie mamy aktualnych danych?

Indeks Younga:

$$P_Y = \sum_{i=1}^N w_i^{\tau} \left( \frac{p_i^t}{p_i^s} \right), \quad w_i^{\tau} = \frac{p_i^{\tau} q_i^{\tau}}{\sum_{k=1}^N p_k^{\tau} q_k^{\tau}}, \quad \tau < s < t \quad (7)$$

Geometryczny indeks Younga:

$$P_{GY} = \prod_{i=1}^N \left( \frac{p_i^t}{p_i^s} \right)^{w_i^{\tau}} \quad (8)$$

Indeks Lowe'a:

$$P_{Lo} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i^t q_i^{\tau}}{\sum_{i=1}^N p_i^s q_i^{\tau}} = \sum_{i=1}^N w_i^{\tau,s} \left( \frac{p_i^t}{p_i^s} \right), \quad w_i^{\tau,s} = \frac{p_i^s q_i^{\tau}}{\sum_{k=1}^N p_k^s q_k^{\tau}} \quad (9)$$

Geometryczny indeks Lowe'a:

$$P_{GLo} = \prod_{i=1}^N \left( \frac{p_i^t}{p_i^s} \right)^{w_i^{\tau,s}} \quad (10)$$

## Indeks Lloyd-Moutlona

Indeks Lloyd-Moutlona (Lloyd, 1975; Moutlon, 1996; Shapiro and Wilcox, 1997) aproksymujący indeks Fishera także nie potrzebuje bieżących danych o wagach (tym samym wielkości konsumpcji) a jedynie korzysta z wag z okresu bazowego:

$$P_{LM}(\sigma) = \left\{ \left[ \sum_{i=1}^N w_i^s \left( \frac{p_i^t}{p_i^s} \right)^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \right\}, \quad (11)$$

gdzie  $\sigma$  jest pewnym rzeczywistym parametrem odzwierciedlającym elastyczność substytucji dóbr.

Niestety rozwiązanie równania  $P_F = P_{LM}(\sigma)$  ze względu na parametr  $\sigma$  jest generalnie niewykonalne analitycznie a jedynie numerycznie (Feenstra and Reinsdorf, 2007; Biggeri and Ferrari, 2010; Greenlees, 2011; Armknecht and Silver, 2012; Białek, 2017). Rozwiązanie to będzie dalej oznaczone przez  $\sigma_0$ .

W literaturze przedmiotu można spotkać rekomendacje dla wartości parametru elastyczności z zakresu **[0.7; 1]** (Biggeri, Ferrari (2010)), ale jak pokazuje poniższy prosty przykład dobór tego parametru nie jest wcale taki jednoznaczny.

### Przykład 1 (12 komponentów, dane umowne)

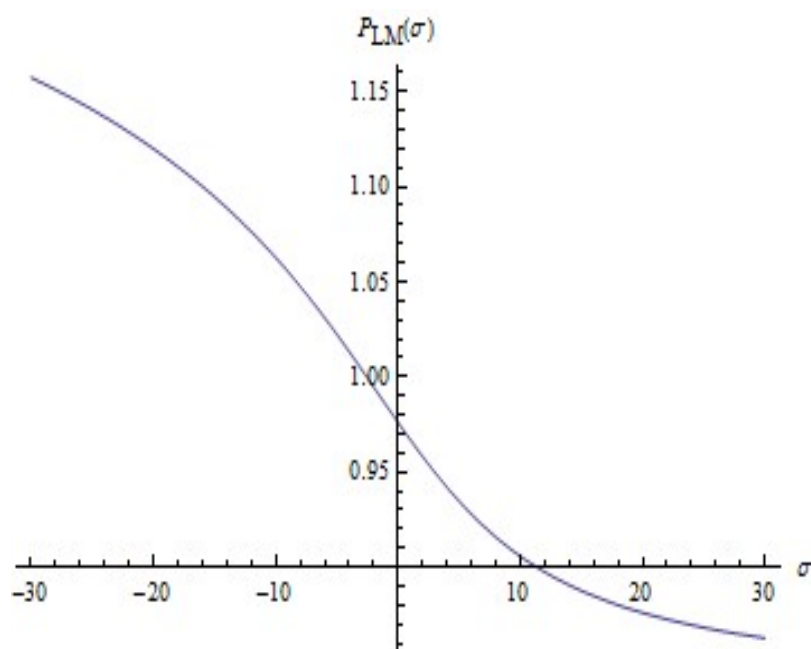
$$P^I = [1000, 1900, 500, 4, 120, 1200, 1000, 1900, 500, 4, 120, 1200]';$$

$$P^S = [800, 1700, 600, 5, 120, 1300, 900, 1700, 460, 5, 90, 1300]';$$

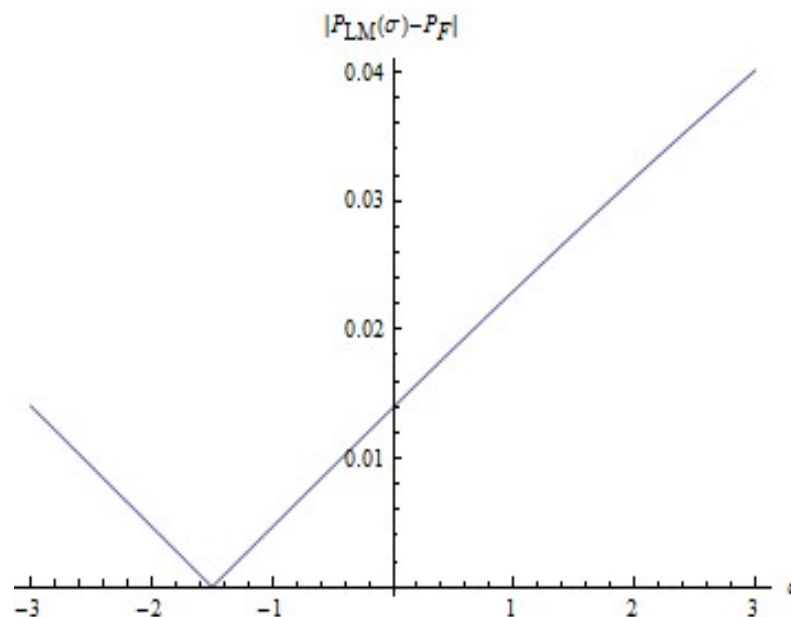
$$Q^I = [200, 200, 3000, 500, 340, 700, 800, 500, 3000, 500, 340, 700]';$$

$$Q^S = [350, 150, 5000, 700, 250, 700, 350, 300, 5000, 700, 250, 700]';$$

**Rys. 1.**



**Rys. 2.**



## Indeks arytmetyczno-geometryczny (AG)

Lent and Dorfman (2009) pokazali, że ważona średnia arytmetyczna z indeksów Laspeyresa i jego geometrycznej wersji może (przy odpowiednim doborze wag) przybliżać indeksy superlatywne. W szczególności zachodzi:

$$P_F \approx P_{AG} = \sigma \prod_{i=1}^N \left( \frac{p_i^t}{p_i^s} \right)^{w_i^s} + (1 - \sigma) \sum_{i=1}^N w_i^s \left( \frac{p_i^t}{p_i^s} \right). \quad (12)$$

Rozwiązując równanie  $P_F = P_{AG}$  ze względu na parametr  $\sigma$  otrzymujemy (Armknicht and Silver, 2012)

$$\hat{\sigma} = \frac{P_F - P_{La}}{P_{GLa} - P_{La}}, \quad (13)$$

gdzie  $P_{GLa}$  geometryczny cenowy indeks Laspeyresa (Von der Lippe, 2007)

$$P_{GLa} = \prod_{i=1}^N \left( \frac{p_i^t}{p_i^s} \right)^{w_i^s}. \quad (14)$$



## **4. Badanie symulacyjne:**

### **Przypadek 1**

$$N = 6$$

$$p_i^T = p_i^0 + (p_i^1 - p_i^0)T,$$

$$q_i^T = q_i^0 + (q_i^1 - q_i^0)T,$$

**Przypadek 1.1** (ceny rosną, ilości spadają),

**Przypadek 1.2** (ceny spadają, ilości rosną),

**Przypadek 1.3** (ceny i ilości rosną),

**Przypadek 1.4** (ceny i ilości spadają).

Tablica 1.

| Case | 1.1     |         |         |         | 1.2     |         |         |         | 1.3     |         |         |         | 1.4     |         |         |         |
|------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| No.  | $p_i^0$ | $p_i^1$ | $q_i^0$ | $q_i^1$ | $p_i^0$ | $p_i^1$ | $q_i^0$ | $q_i^1$ | $p_i^0$ | $p_i^1$ | $q_i^0$ | $q_i^1$ | $p_i^0$ | $p_i^1$ | $q_i^0$ | $q_i^1$ |
| 1    | 100     | 150     | 1000    | 900     | 200     | 170     | 1000    | 1200    | 140     | 190     | 1000    | 2200    | 240     | 190     | 1000    | 700     |
| 2    | 10      | 13      | 10000   | 8000    | 17      | 15      | 10000   | 12000   | 10      | 11      | 10000   | 12000   | 13      | 11      | 17000   | 12000   |
| 3    | 5       | 7       | 2.5     | 2       | 9       | 7       | 2.5     | 3       | 15      | 16      | 2.5     | 3.7     | 7       | 16      | 5       | 3.7     |
| 4    | 1000    | 1150    | 2020    | 1950    | 1200    | 1150    | 2020    | 2750    | 1000    | 1150    | 2020    | 2750    | 1200    | 1150    | 3020    | 2750    |
| 5    | 100     | 130     | 300     | 195     | 150     | 130     | 300     | 485     | 100     | 110     | 300     | 485     | 130     | 110     | 500     | 485     |
| 6    | 70      | 100     | 2000    | 1900    | 140     | 100     | 2000    | 2400    | 70      | 100     | 2000    | 2800    | 125     | 100     | 3500    | 2800    |

$$\tau \in \{-1, -0.75, -0.5, -0.25, 0.5\}$$

## Wyniki:

### Przypadek 1.1

| Formula         | $\tau = -1$       | $\tau = -0.75$ | $\tau = -0.5$     | $\tau = -0.25$    | $\tau = 0.5$     |
|-----------------|-------------------|----------------|-------------------|-------------------|------------------|
| $P_Y$           | 1.17939           | 1.18241        | 1.18499           | 1.18722           | 1.19214          |
| $P_{GY}$        | 1.17678           | 1.17952        | 1.18186           | 1.18388           | 1.18834          |
| $P_{Lo}$        | 1.19133           | 1.19080        | 1.19025           | 1.18969           | 1.18793          |
| $P_{GLo}$       | 1.18770           | 1.18720        | 1.18669           | 1.18615           | 1.18448          |
| $P_{La} - P_F$  | 0.00121           | <b>0.00121</b> | 0.00121           | 0.00121           | 0.00121          |
| $P_Y - P_F$     | -0.00851          | -0.00549       | -0.00291          | <b>-0.00068 *</b> | 0.00423          |
| $P_{GY} - P_F$  | -0.01112          | -0.00838       | -0.00603          | -0.00402          | 0.00043          |
| $P_{Lo} - P_F$  | 0.00342           | 0.00289 *      | 0.00235           | 0.00179           | <b>0.00003 *</b> |
| $P_{GLo} - P_F$ | <b>-0.00020 *</b> | -0.00707       | <b>-0.00121 *</b> | -0.00175          | -0.00342         |

## Przypadek 1.2

| Formula         | $\tau = -1$     | $\tau = -0.75$  | $\tau = -0.5$   | $\tau = -0.25$  | $\tau = 0.5$      |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| $P_Y$           | 0.91243         | 0.91590         | 0.91891         | 0.92158         | 0.92837           |
| $P_{GY}$        | 0.90819         | 0.91193         | 0.91518         | 0.91808         | 0.92549           |
| $P_{Lo}$        | 0.91809         | 0.92006         | 0.92164         | 0.92293         | 0.92571           |
| $P_{GLo}$       | 0.91433         | 0.91645         | 0.91816         | 0.91955         | 0.92257           |
| $P_{La} - P_F$  | <b>-0.00148</b> | <b>-0.00148</b> | <b>-0.00148</b> | <b>-0.00148</b> | -0.00148          |
| $P_Y - P_F$     | -0.01307        | -0.00959        | -0.00658        | -0.00391        | 0.00287           |
| $P_{GY} - P_F$  | -0.01730        | -0.01356        | -0.01031        | -0.00741        | <b>0.000006 *</b> |
| $P_{Lo} - P_F$  | -0.00740 *      | -0.00543 *      | -0.00386 *      | -0.00256 *      | 0.00021           |
| $P_{GLo} - P_F$ | -0.01116        | -0.00904        | -0.00733        | -0.00594        | -0.00293          |

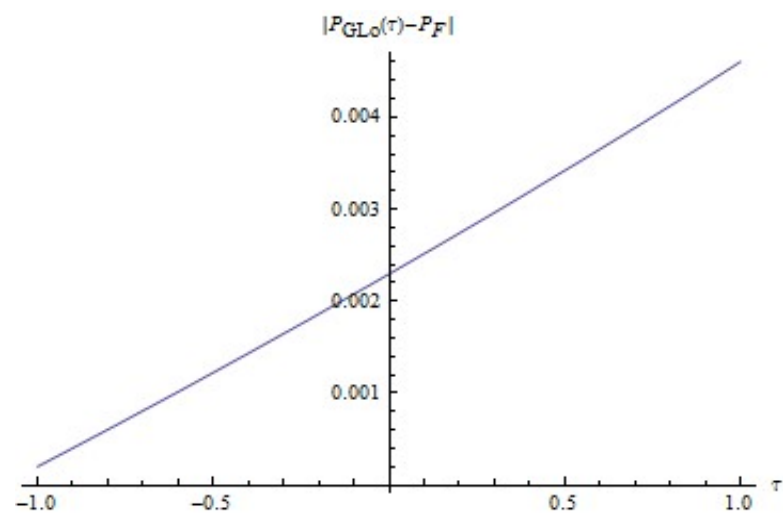
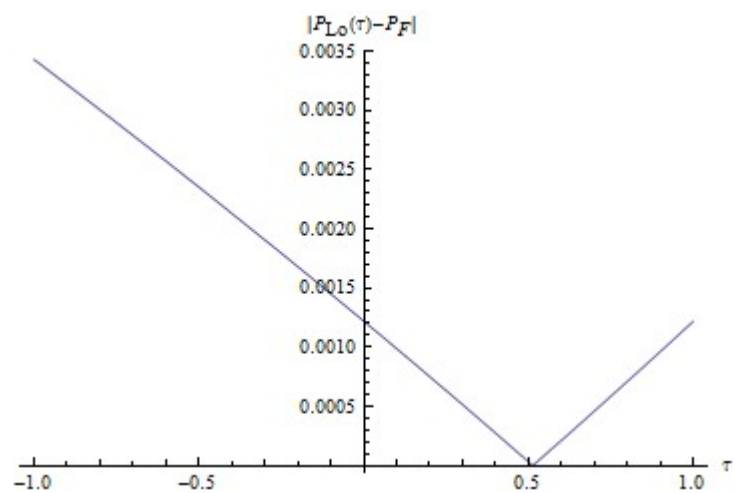
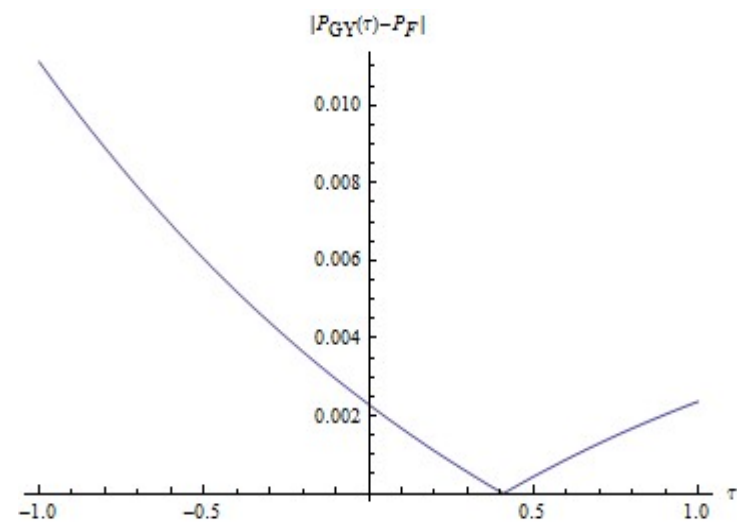
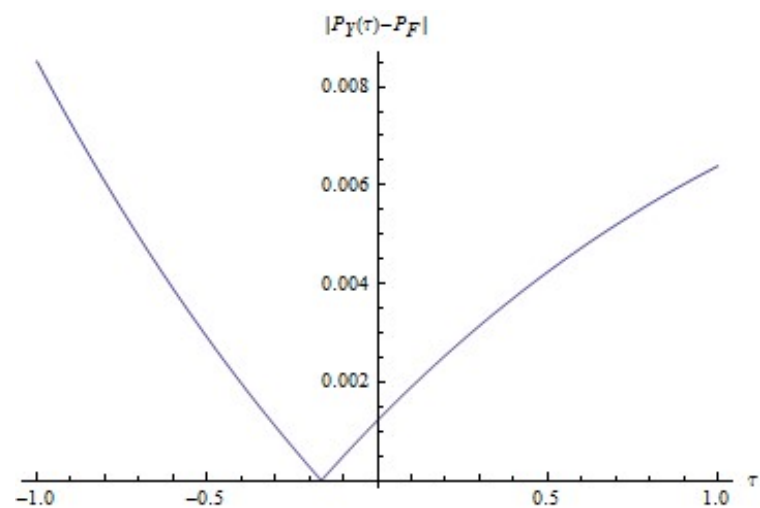
### Przypadek 1.3

| Formula         | $\tau = -1$     | $\tau = -0.75$  | $\tau = -0.5$   | $\tau = -0.25$  | $\tau = 0.5$     |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| $P_Y$           | 1.15457         | 1.16081         | 1.16626         | 1.17105         | 1.18251          |
| $P_{GY}$        | 1.15359         | 1.15935         | 1.16440         | 1.16886         | 1.17959          |
| $P_{Lo}$        | 1.15906         | 1.16492         | 1.16927         | 1.17263         | 1.17930          |
| $P_{GLo}$       | 1.15764         | 1.16309         | 1.16716         | 1.17032         | 1.17659          |
| $P_{La} - P_F$  | <b>-0.00340</b> | <b>-0.00340</b> | <b>-0.00340</b> | <b>-0.00340</b> | -0.00340         |
| $P_Y - P_F$     | -0.02414        | -0.01790        | -0.01245        | -0.00765        | 0.00379          |
| $P_{GY} - P_F$  | -0.02512        | -0.01936        | -0.01431        | -0.00985        | <b>0.00087 *</b> |
| $P_{Lo} - P_F$  | -0.01965 *      | -0.01379 *      | -0.00944 *      | -0.00608 *      | 0.00583          |
| $P_{GLo} - P_F$ | -0.02107        | -0.01562        | -0.01155        | -0.00839        | -0.00211         |

## Przypadek 1.4

| Formula         | $\tau = -1$     | $\tau = -0.75$  | $\tau = -0.5$   | $\tau = -0.25$  | $\tau = 0.5$      |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| $P_Y$           | 0.92064         | 0.92229         | 0.92399         | 0.92573         | 0.93125           |
| $P_{GY}$        | 0.91818         | 0.91990         | 0.92168         | 0.92351         | 0.92932           |
| $P_{Lo}$        | 0.92433         | 0.92507         | 0.92584         | 0.92666         | 0.92943           |
| $P_{GLo}$       | 0.92204         | 0.92281         | 0.92362         | 0.92448         | 0.92740           |
| $P_{La} - P_F$  | <b>-0.00202</b> | <b>-0.00202</b> | <b>-0.00202</b> | <b>-0.00202</b> | -0.00202          |
| $P_Y - P_F$     | -0.00891        | -0.00726        | -0.00556        | -0.00382        | 0.00169           |
| $P_{GY} - P_F$  | -0.01137        | -0.00965        | -0.00787        | -0.00604        | -0.00023          |
| $P_{Lo} - P_F$  | -0.00522 *      | -0.00448 *      | -0.00371 *      | -0.00289 *      | <b>-0.00012 *</b> |
| $P_{GLo} - P_F$ | -0.00751        | -0.00674        | -0.00593        | -0.00507        | -0.00216          |

Rys. 3. Odległości pomiędzy rozważanymi indeksami w zależności od parametru  $\tau$  (przypadek 1.1)



## Przypadek 2

**Procesy cen** ( $N = 4$ )

$$dp_i^t = \alpha_i p_i^t dt + \beta_i p_i^t dW_i^t$$

$$p_i^t = p_i^0 \exp\left(\left(\alpha_i - \frac{\beta_i^2}{2}\right)t + \beta_i W_i^t\right) \quad \text{Ito (1951))}$$

$$E(p_i^t) = p_i^0 \exp(\alpha_i t), \quad \text{Oksendal (2002))}$$

$$\text{Var}(p_i^t) = (p_i^0)^2 \exp(2\alpha_i t) [\exp(\beta_i^2 t) - 1].$$

**Procesy ilości**

$$dq_i^t = \gamma_i q_i^t dt + \theta_i q_i^t dW_i^t$$

$$q_i^t = q_i^0 \exp\left(\left(\gamma_i - \frac{\theta_i^2}{2}\right)t + \theta_i W_i^t\right)$$



**Przy czym, dla procesów cen:**

$$\alpha_1 = 0.43, \beta_1 = 0.05,$$

$$\alpha_2 = -0.03, \beta_2 = 0.01,$$

$$\alpha_3 = 0.25, \beta_3 = 0.013,$$

$$\alpha_4 = -0.05, \beta_4 = 0.01,$$

**Dla procesów ilości:**

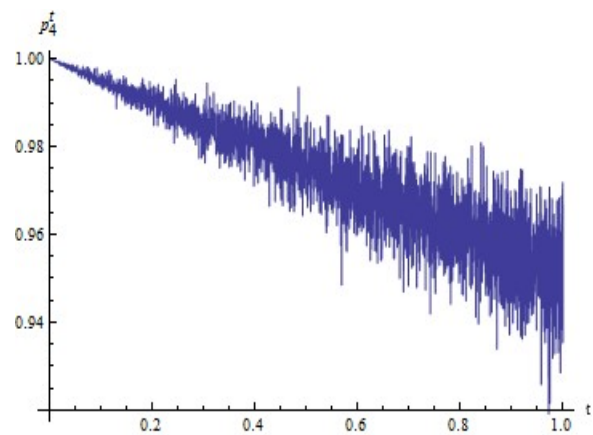
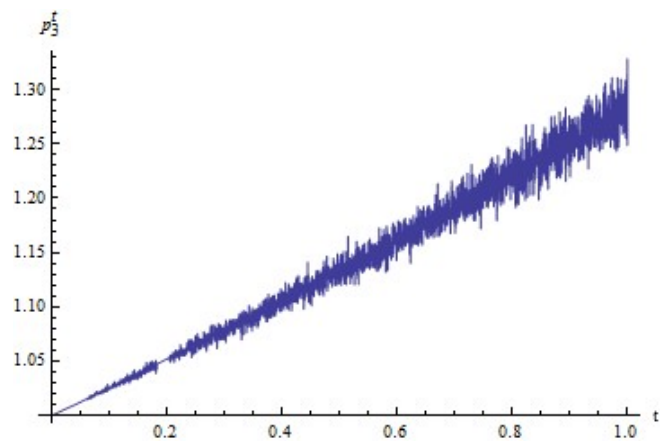
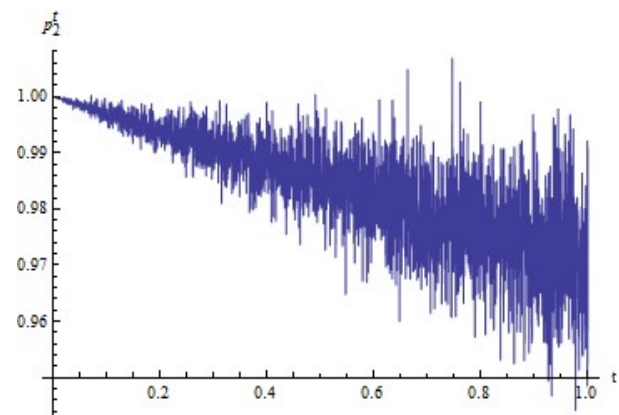
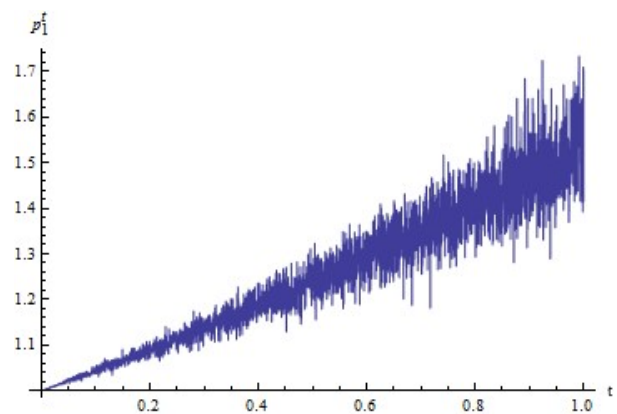
$$\gamma_1 = -0.22, \theta_1 = 0.05,$$

$$\gamma_2 = 0.095, \theta_2 = 0.05,$$

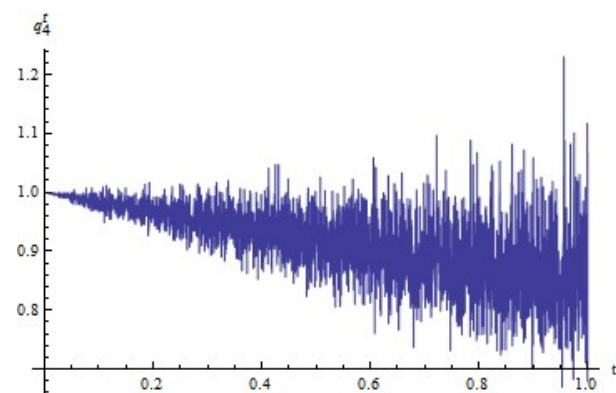
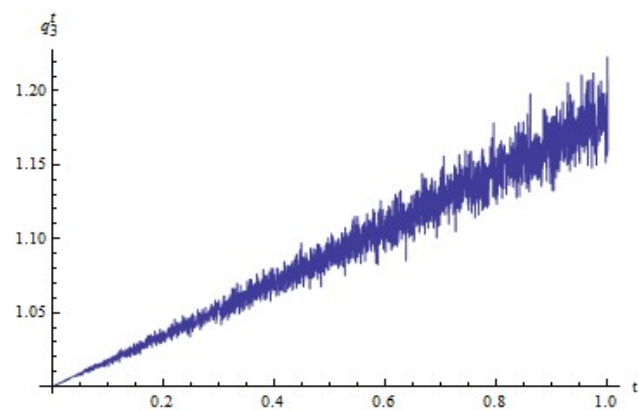
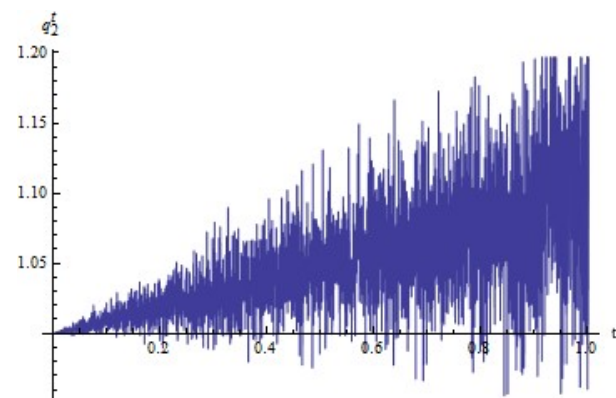
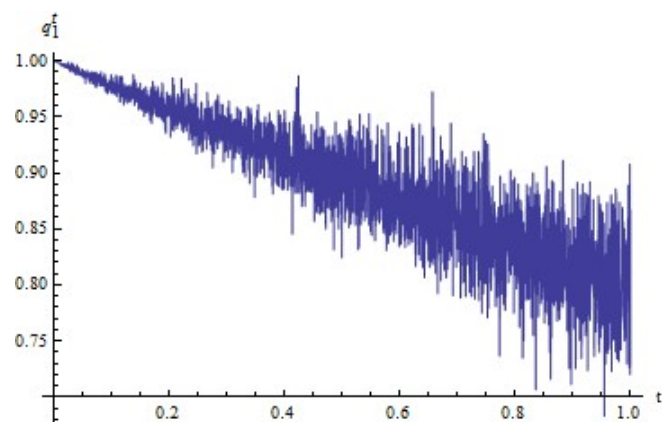
$$\gamma_3 = 0.17, \theta_3 = 0.012,$$

$$\gamma_4 = -0.16, \theta_4 = 0.092.$$

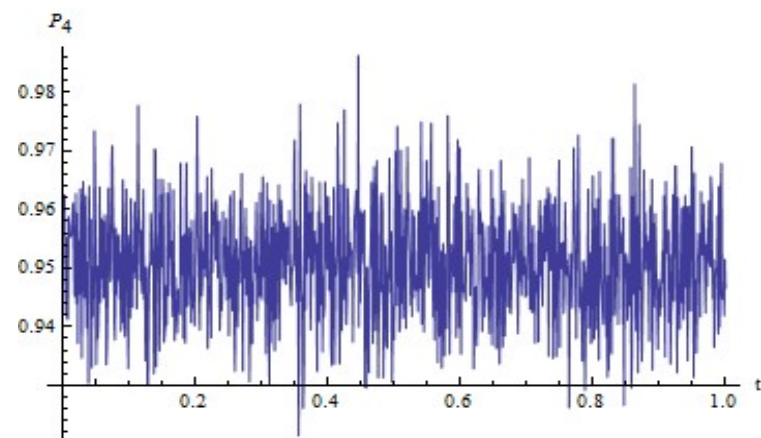
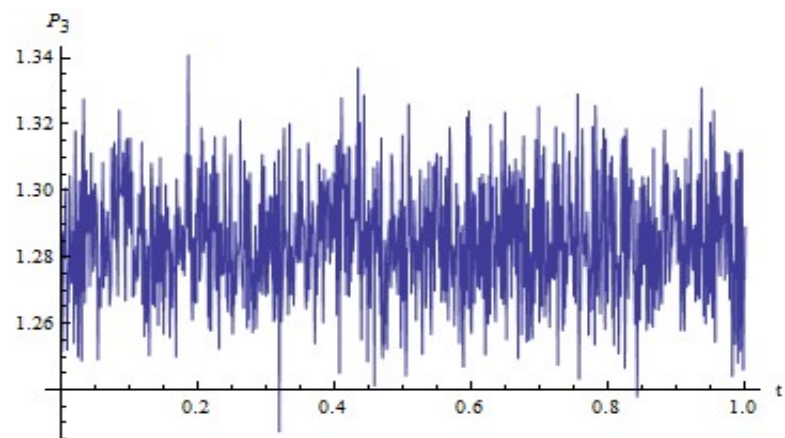
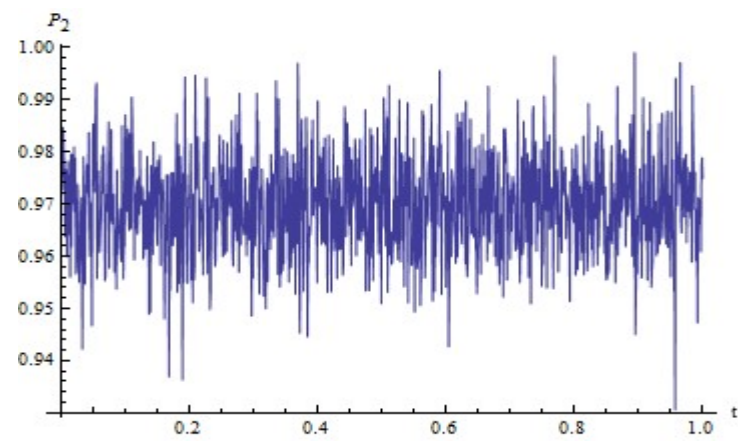
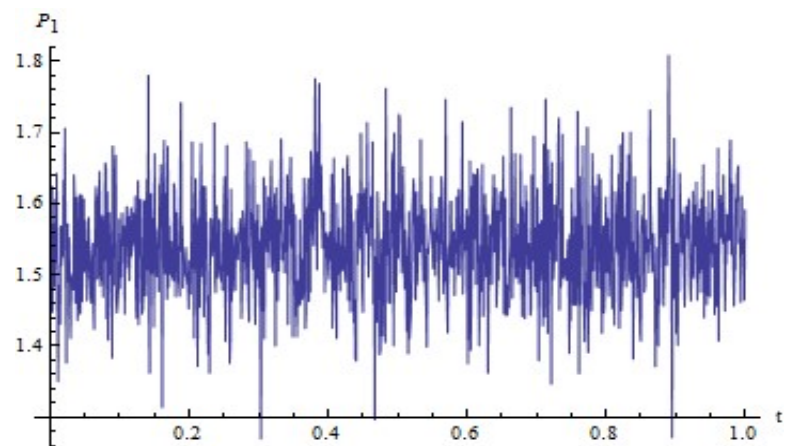
Rys. 4. Procesy  $p_1^t$ ,  $p_2^t$ ,  $p_3^t$  i  $p_4^t$ .



Rys. 5. Procesy  $q_1^t$ ,  $q_2^t$ ,  $q_3^t$  and  $q_4^t$ .



Rys. 6. Indeksy cząstkowe – przykładowe realizacje



(\*) Mathematica 11.0.

**Liczba repetycji: 10000**

$$[\tau, t] = [0, 1]$$

$$s \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$$

**Wyniki:**

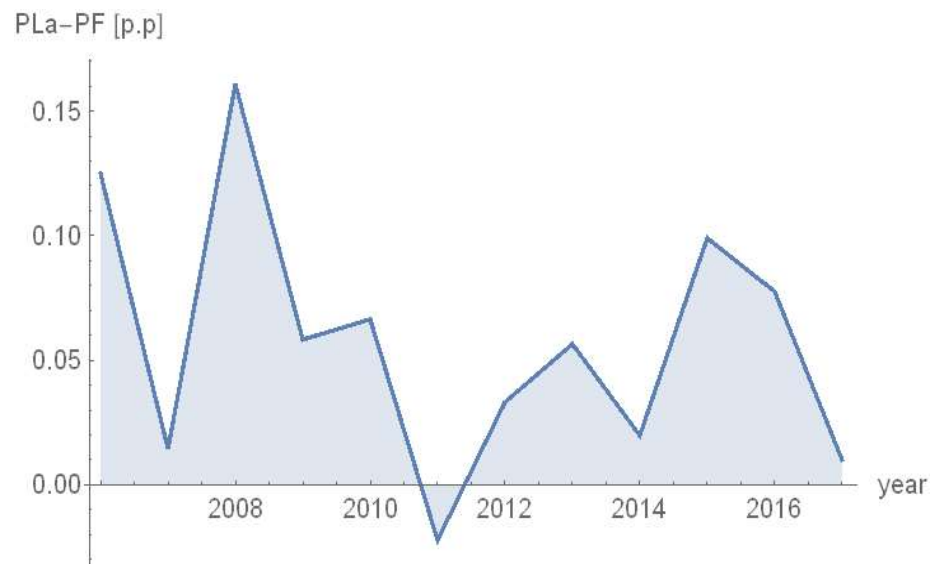
| Case            | $s = 0.25$      |          |                   | $s = 0.5$       |          |                   | $s = 0.75$     |          |                   |
|-----------------|-----------------|----------|-------------------|-----------------|----------|-------------------|----------------|----------|-------------------|
|                 | Mean            | Std. dev | Std. dev/<br>Mean | Mean            | Std. dev | Std. dev/<br>Mean | Mean           | Std. dev | Std. dev/<br>Mean |
| $P_{La} - P_F$  | <b>0.00260</b>  | 0.00011  | 0.04333           | <b>0.00116</b>  | 0.00006  | 0.05207           | <b>0.00025</b> | 0.00002  | 0.10331           |
| $P_Y - P_F$     | -0.00845        | 0.00003  | -0.00354          | -0.00741        | 0.00005  | -0.00693          | -0.00571       | 0.00011  | -0.0197           |
| $P_{GY} - P_F$  | -0.01690        | 0.00016  | -0.00951          | -0.01292        | 0.00015  | -0.01214          | -0.00698       | 0.00015  | -0.02247          |
| $P_{Lo} - P_F$  | 0.00454         | 0.00018  | 0.03972           | 0.00377         | 0.00017  | 0.04530           | 0.00199        | 0.00016  | 0.08508           |
| $P_{GLo} - P_F$ | -0.00409<br>(*) | 0.00004  | -0.00993          | -0.00186<br>(*) | 0.00005  | -0.03068          | 0.00069<br>(*) | 0.00012  | 0.17376           |

## 5. Badanie empiryczne:

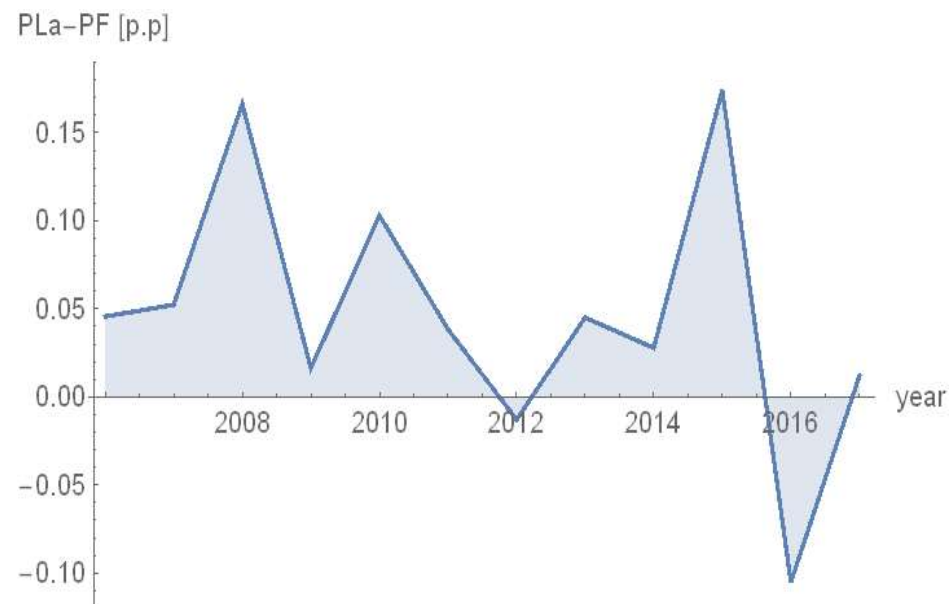
Dane: dla Polski (2006-2016), źródło: Eurostat, dane roczne (HICP), poziom COICOP 3 i COICOP 4

Rys. 7

COICOP 3

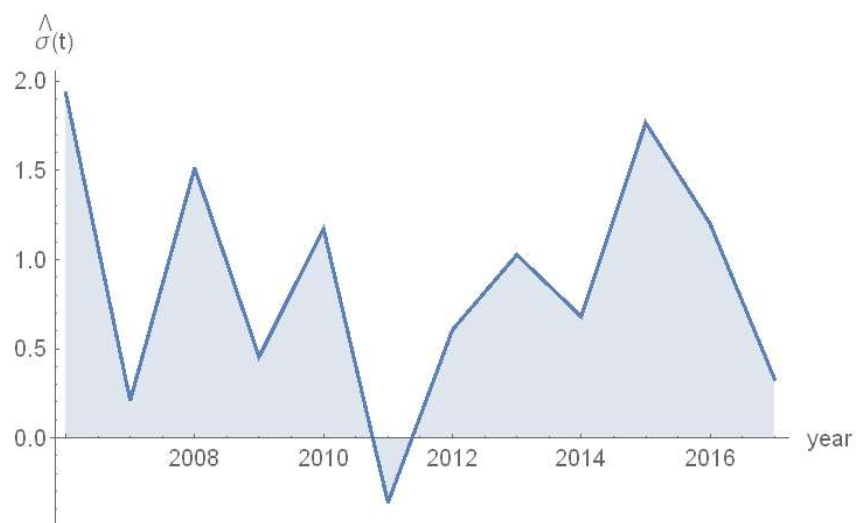
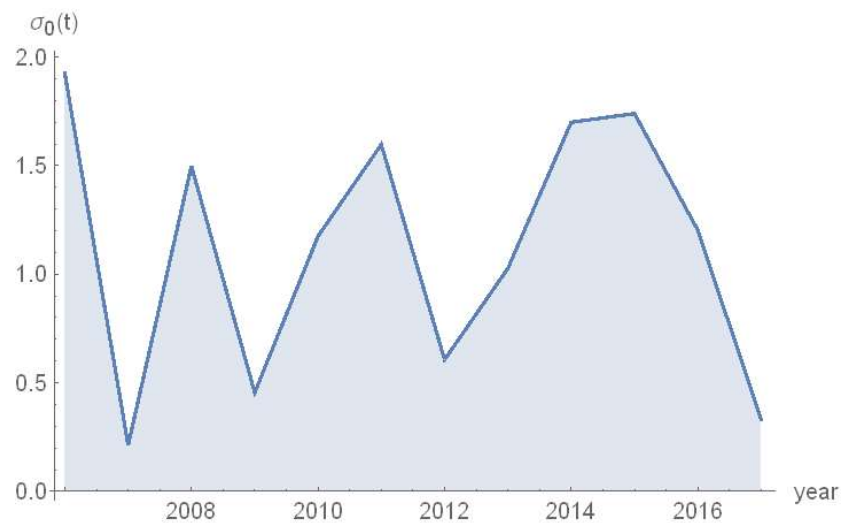


COICOP 4

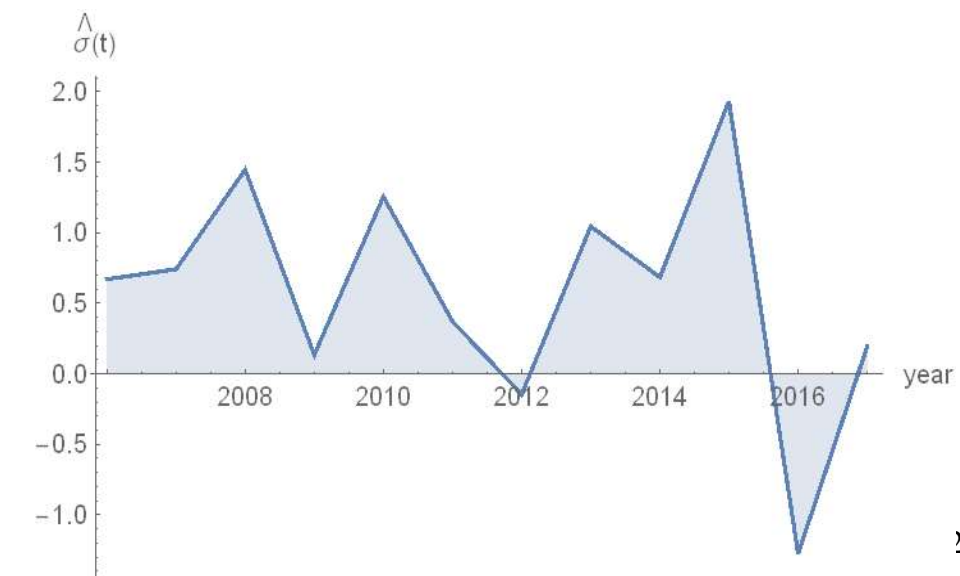
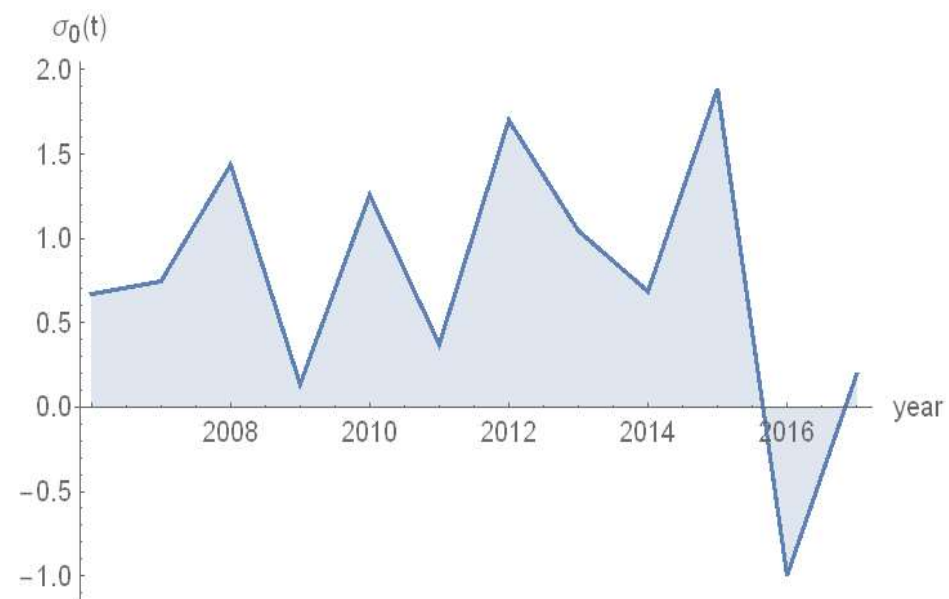


# Rys 8

## COICOP 3

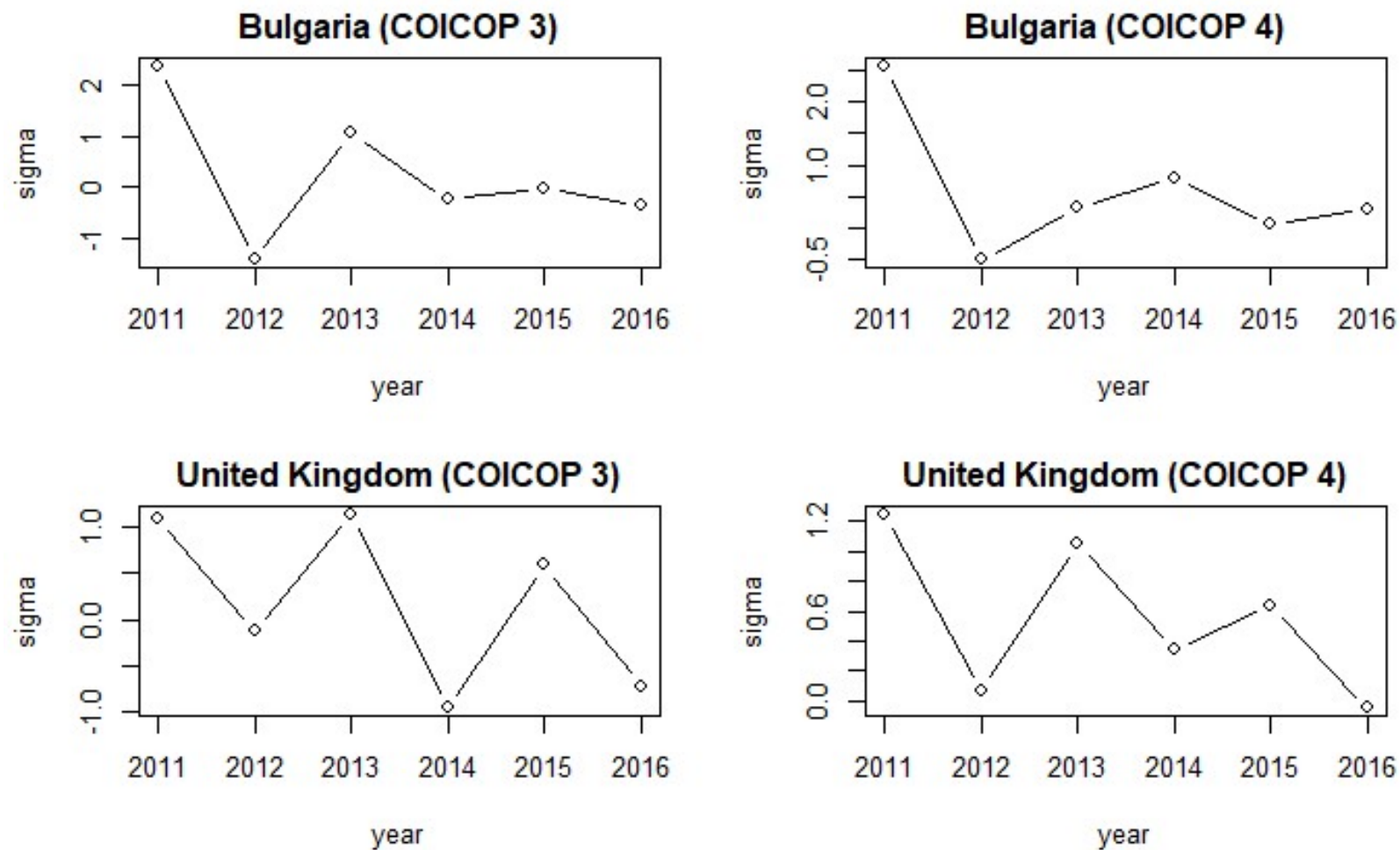


## COICOP 4



## Szacunki parametru $\hat{\sigma}$ dla Bułgarii i Wielkiej Brytanii (2011-2016)

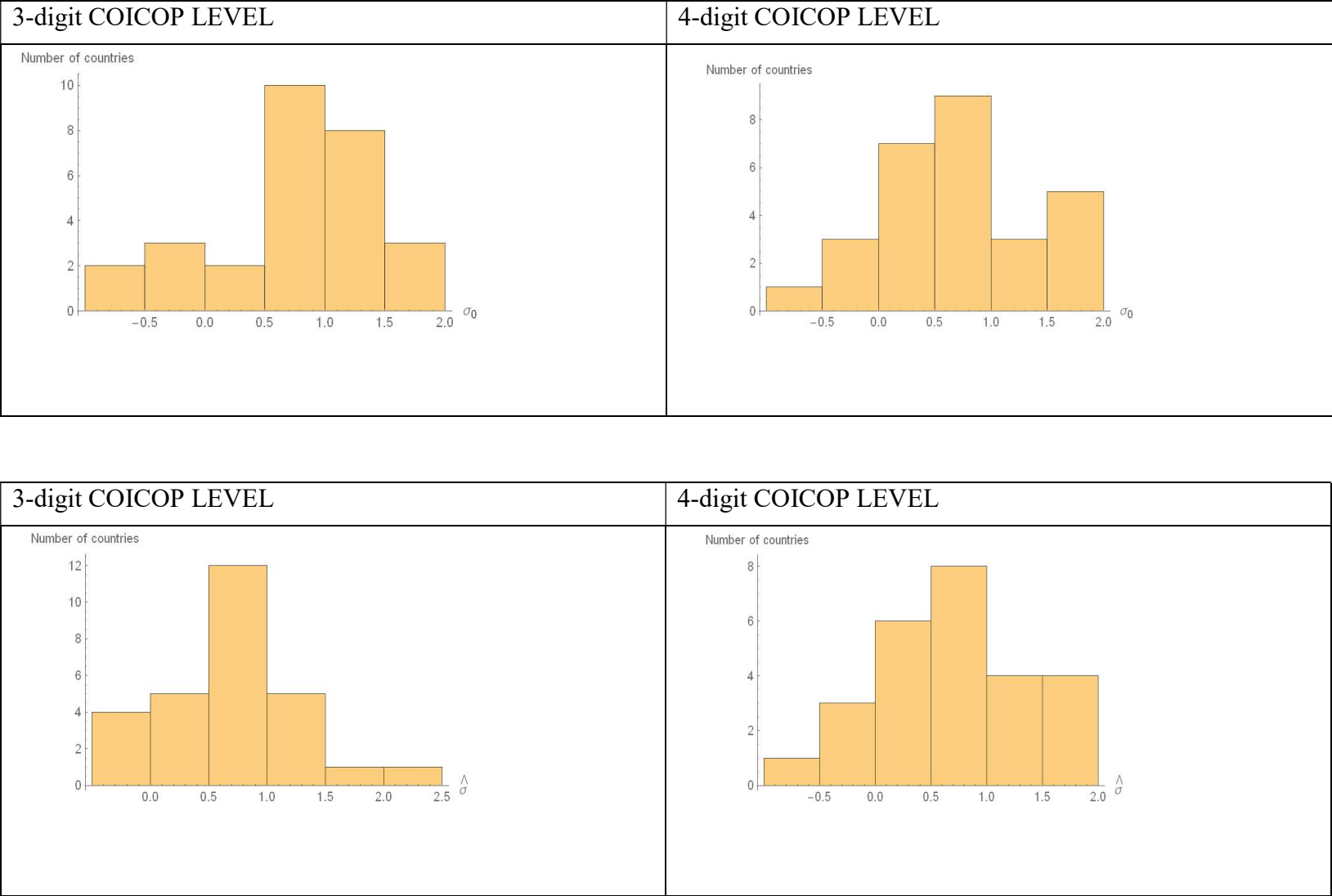
Rys. 9.





# Histogramy dla szacowanych parametrów dla całej UE dla roku 2017 (HICP)

Rys. 10.



## **Wnioski:**

### **Badanie symulacyjne:**

- Przypadek 1. Tylko sytuacja 1.1. pozwala redukować obciążenie CPI (dla dużych wartości  $\tau$  najlepszy jest indeks Lowe'a, dla małych wartości  $\tau$  – indeks Younga). W przypadkach 1.2 – 1.4. najlepsze przybliżenie indeksu Fishera daje indeks Laspeyresa. Jeśli jednak nie możemy go użyć, najlepsze wyniki daje indeks Lowe'a.
- Gdy  $\tau > 0$  rekomendować można indeksy Lowe'a oraz geometryczny indeks Younga.
- W przypadku 2 (stochastycznym) nie odnotowano redukcji obciążenia CPI. Niemniej jednak geometryczny indeks Lowe'a dawał satysfakcjonujące przybliżenie indeksu Fishera.
- Badanie empiryczne potwierdza niestabilność w czasie oszacowań parametrów występujących w formułach Lloyda-Moutlona oraz formule AG. Co więcej, zarówno oszacowania dla efektu substytucji jak i oszacowania wspomnianych parametrów są silnie zależne od przyjętego poziomu agregacji danych.

### **Ogólna rekomendacja – indeks Lowe'a.**

## Literatura

- Afriat, S.N. (1972), *The Theory of International Comparisons of Real Income and Prices*, 13-69, In D. J. Daly (ed.), *International Comparisons of Prices and Outputs*, New York: Columbia University Press
- Balk M. (1995). *Axiomatic Price Index Theory: A Survey*, International Statistical Review 63, 69-95.
- Biggeri, G. Ferrari (eds.), *Price Indexes in Time and Space*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010
- Boskin M.J., Dulberger E.R., Gordon R.J., Griliches Z., Jorgenson D. (1996), *Toward a More Accurate Measure of the Cost of Living*, Final Raport to the Senate Finance Committee from the Advisory Commision to Study the Consumer Price Index.
- Clements, K.W., Izan, H.Y.(1987). *The Measurement of Inflation: A Stochastic Approach*, Journal of Business and Economic Statistics 5, 339-350.
- Dahlen, J. (1994), *Sensitivity Analysis for Harmonizing European Consumer Price Indices*, Statistics Canada, Ottawa.
- Diewert W.E. (1976), *Exact and superlative index numbers*, Journal of Econometrics, 4, 114-145, North-Holland Publishing Company.
- Diewert W.E. (1993), *The economic theory of index numbers: a survey*, Essays in index number theory, vol. 1, Eds. W.E. Diewert and A.O. Nakamura, 177-221, Amsterdam.
- Fisher I. (1922), *The Making of Index Numbers*, Boston: Houghton Mifflin.
- Hanousek J., Filer R.K. (2003), *Inflationary bias in middle to late transition Czech Republic*, Economic Systems 27, 367-376.
- Hoffmann, J. (1999), *Problems of Inflation Measurement in Germany: An Update*, Deutsche Bundesbank Research Paper, Frankfurt.
- Jorgenson D.W., Slesnick D.T. (1983), *Individual and social cost of living indexes*, Price level measurement: proceedings of a conference sponsored by Statistics Canada, Eds. W.E. Diewert and C. Montmarquette, 241-336, Ottawa: Statistics Canada.
- Lloyd, P. J. (1975), *Substitution Effects and Biases in Nontrue Price Indices*, The American Economic Review, 65(3), 301–313.
- Moulton, B. R. (1996), *Constant Elasticity Cost-of-Living Index in Share-Relative Form*, unpublished.
- Pollak R.A. (1971), *The theory of the cost of living index*, Research Discussion Paper no. 11, Office of Prices and Living Conditions, U.S. Bureau of Labor Statistics, Washington.
- Pollak R.A. (1989), *The theory of the cost-of-living index*, Oxford: Oxford University Press.
- Samuelson P.A., Swamy S. (1974), *Invariant economic index numbers and canonical duality: Survey and synthesis*, American Economic Review 64, 566-593.
- Shapiro, M. D., Wilcox D. W. (1997), *Alternative Strategies for Aggregating Prices in the CPI*, Federal Reserve Bank of St. Louis Review, 79(3), 113–125.
- White A.G. (1999), *Measurement Biases in Consumer Price Indexes*, International Statistical Review, 67, 3, 301-325.
- Woolford, K. (1994), *A Pragmatic Approach to the Selection of Appropriate Index Formulae*, Statistics Canada, Ottawa.
- Von der Lippe P. (2007), *Index Theory and Price Statistics*, Peter Lang, Frankfurt, Germany.